Modelarea volatilităţii seriilor de timp prin modele GARCH simetrice

Cristiana Tudor

This paper employs symmetric GARCH models to investigate the volatility on the Romanian and American stock markets. We consider two empiric time series from each market, consisting in daily logarithmic returns. For Bucharest Stock Exchange, we include the composite index BET-C and TLV (Transilvania Bank), a company listed on BSE and for New York Stock Exchange we consider the S&P 500 index and also the KO stock (Coca-Cola). All time series cover the period January, 03 2001 – February 09, 2008 or a total of 1853 daily returns in each case. For each of the four time series we estimate the simple GARCH(1,1) model and also the GARCH-in-Mean (1,1) model. The preliminary investigations show that the time series of TLV does not present the phenomenon of volatility clustering, which is later confirmed by the estimation of the GARCH models. For the other three series, the coefficients of the estimated GARCH models are statistically significant and their sum is close to one for S&P 500 and KO, which implies persistence of the conditional variance for the two processes. For BET-C, the process reverts to the mean more rapidly. The diagnostics confirm that the symmetric models are correctly specified for S&P 500 and KO, while in the case of BET-C the estimated models did not remove all heteroskedasticity from the residuals, suggesting that we must find other specifications for the variance equation. In addition, The GARCH-in-Mean model confirms that increased risk will lead to a rise in future returns for all considered series, the coefficient of the conditional standard deviation being positive and statistical significant in all cases.

Keywords: *volatility clustering, GARCH (1, 1), GARCH-in-Mean*

JEL Clasiffication Codes: *C22, C51*

1. Introducere si scurta privire de ansamblu asupra literaturii

Doua dintre cele mai utilizate modele de investigare a volatilitatii randamentelor sunt asa-numitele modele ARCH (Autoregressive Conditional Heteroskedasticity) si modele ARCH Generalizate (Generalized ARCH sau GARCH), dezvoltate de catre Engle1 si extinse de Bollerslev2 si Nelson3.

Doua caracteristici importante descoperite in investigarea seriilor de timp financiare il reprezinta „cozile groase" si clusterizarea volatilitatii si este foarte important faptul ca aceste proprietati empirice pot fi bine capturate de catre modelele din familia GARCH. Trebuie subliniat aici faptul ca, spre deosebire de alte modele pentru volatilitate, modelele ARCH formuleaza varianta conditionala, ht, a randamentelor prin procedura probabilitatii maxime (maximum likelihood), in locul utilizarii deviatiei standard a esantionului considerat.

Primul exemplu al unui model ARCH este ARCH (q) (Engle) unde ht este determinat in functie de valorile trecute patratice ale lui q. In GARCH (p, q) (Bollerslev 1987, si Taylor 19874), dependente aditionale sunt permise pentru p laguri ale valorilor trecute ale ht. Dovezile empirice sugereaza ca GARCH este un model mai parsimonios decat ARCH, iar GARCH(1,1) este structura cea mai populara pentru multe serii de timp financiare.

[1] Engle, R. F., *Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of the United Kingdom Inflation*, Econometrica 50(4), 1982

[2] Bollerslev, T. *Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*, Journal of Econometrics, 31, 1986;

[3] Nelson, D. B., *Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: a New Approach*. Econometrica, 59(2), 1991

[4] Taylor, Stephen J., *Forecasting the volatility of currency exchange rates*, Journal of International Forecasting 3, 1987;

Modelul EGARCH (Exponential GARCH) (Nelson, 1991) specifica varianta conditionata sub forma logaritmica, ceea ce inseamna ca nu mai este nevoie sa fie impuse constrangeri asupra estimarilor pentru a fi evitata varianta negativa.

Multe studii empirice intalnite in literatura financiara au sustinut modelele ARCH/GARCH si extensiile acestora. Akgiray1 relateaza ca modelele GARCH au rezultate mai bune in mod consistent decat alte modele in toate sub-perioadele si in ce priveste toate masurile de evaluare, in timp ce Pagan si Schwert2 descopera ca EGARCH performeaza mai bine fata de modelele neparametrice. Cao and Tsay (1992) relateaza ca EGARCH ofera cele mai bune previziuni pentru actiunile companiilor cu capitalizare redusa, pe care ei il explica printr-un efect de levier. Bali (2000) relateaza despre utilizarile modelelor GARCH, in special a celor nelineare, in ce priveste modelarea volatilitatii viitoare (de peste o saptamana) a randamentelor T-Bills-urilor pe piata SUA.

In general, modele care permit asimetria volatilitatii au performat cel mai bine in ceea ce priveste puterea lor de previzionare a volatilitatii, datorita legaturii negative puternice intre volatilitate si socurile care au impact asupra ei. Charles Cao si Ruey Tsay (1992), Ronald Heynen si Harry Kat (1994), Lee (1991), si Adrian Pagan si G. William Schwert (1990) au favorizat modelul EGARCH pentru determinarea volatilitatii indicilor bursieri si cursului de schimb, in timp ce Brailsford si Faff (1996) si Taylor (2001) au descoperit ca GJR-GARCH este mai potrivit decat GARCH in explicarea indicilor de actiuni.

[1] Akgiray, Vedat, *Conditional Heterroscedasticity in Time Series of Stock Returns: Evidence and Forecasts*, Journal of Business 62 (1), 1989;
[2] Pagan, A., and Schwert G.W., *Alternative Models for Conditional Volatility*, Journal of Econometrics, 45, 1990;

2. Modelul ARCH (Autoregressive Conditional Heteroskedasticity Model)

Engle1 (1982) a propus un asa-numit model ARCH (autoregressive conditional heteroskedasticity) pentru modelarea corelatiei seriale din reziduurile patratice, sau heteroschedasticitate. Modelul lui Engle avea asadar urmatoarea forma:

$$y_t = E_{t-1}[y_t] + \varepsilon_t, \quad (1)$$

$$\varepsilon_t = z_t \sigma_t, \quad (2)$$

$$\sigma_t^2 = a_0 + a_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \ldots + a_p \varepsilon_{t-p}^2, \quad (3)$$

unde $E_{t-1}[yt]$ reprezinta valoarea asteptata conditionata de informatia disponibila la momentul t-1, iar z_t este o secventa de variabile aleatoare independente si identic distribuite (iid) cu media zero si varianta unitara.

Restrictiile $a_0>0$ si $a_i>0$ (i=1,…,p) sunt necesare pentru ca varianta sa fie pozitiva ($\sigma_t^2 > 0$).

[1] Engle, R. F., *Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of the United Kingdom Inflation*, Econometrica 50(4), 1982

Ecuatia variantei din (3) poate fi rescrisa ca un process de tip AR(p) pentru seria de reziduuri ε in felul urmator:

$$\varepsilon_t^2 = a_0 + a_1\varepsilon_{t-1}^2 + ... + a_p\varepsilon_{t-p}^2 + u_t,$$
(4)

unde $u_t = \varepsilon_t^2 - \sigma_t^2$ este o secventa de diferente martingale (*martingale difference sequence - MDS*) deoarece $E_{t-1}[yt] = 0$ si se presupune ca $E(\varepsilon_t^2) < \infty$.

Daca $a_1+\ldots+a_p < 1$, atunci procesul care genereaza ε este covariant stationar.

Pesistenta lui ε_{2t} si σ_{2t} se masoara prin suma $a_1+\ldots+a_p$, iar varianta neconditionata a lui ε_t se calculeaza cu urmatoarea formula:

$$\overline{\sigma}^2 = \mathrm{var}(\varepsilon_t) = E(\varepsilon_t^2) = \frac{a_0}{(1 - a_1 - ... - a_p)}$$
(5)

3. Modelul GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity Model)

O importanta extensie a modelului ARCH al lui Engle a fost propusa de catre Bollerslev1 (1986), care a inlocuit modelul AR(p) din ecuatia (3) cu un model de forma ARMA(p,q) in felul urmator:

$$R_t = \mu + \varepsilon_t \quad (6)$$

$$\varepsilon_t = z_t \sigma_t \quad (7)$$

$$\sigma_t^2 = \omega_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \sigma_{t-j}^2 \quad (8)$$

unde coeficientii α_i si β_j se presupune ca sunt toti pozitivi pentru ca varianta conditionata σ_{2t} sa fie intotdeauna pozitiva.

Ecuatiile (6), (7), (8) formeaza modelul cunoscut sub denumirea de modelul ARCH generalizat sau GARCH (p,q).

Cand q = 0, modelul GARCH se reduce la modelul ARCH.

Pentru ca parametrii GARCH (β_j) sa poata fi estimati, este necesar ca cel putin unul dintre parametrii ARCH (α_i) sa fie diferiti de zero.

Termenii ARCH reliefeaza vestile despre volatilitatea din perioadele precedente si se masoara ca lag al reziduurilor patratice din ecuatia mediei.

[1] Bollerslev, T. *Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*, Journal of Econometrics, 31, 1986;

Termenii GARCH (β) reprezinta persistenta socurilor trecute asupra volatilitatii sau persistenta impactului vestilor trecute asupra volatilitatii.

Studiile empirice au aratat ca aproape intotdeauna un model simplu GARCH(1,1) care foloseste doar trei parametri in ecuatia variantei conditionate este suficient pentru a modela seriile financiare (vezi Hansen si Lunde1, 2004).

Modelul standard GARCH (1,1) propune asadar urmatoarea ecuatie pentru varianta conditionata:

$$\sigma_t^2 = \omega_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$$
(9)

Observam asadar ca varianta conditionata (varianta din perioada urmatoare calculata pe baza informatiilor trecute) este o functie de trei termeni: media (ω), vestile despre volatilitatea trecuta masurata ca lag al reziduurilor patratice din ecuatia mediei ε_{2t-1} (termenul ARCH) si varianta previzionata din perioada trecuta σ_{2t-1} (termenul GARCH).

La fel cum modelul ARCH se poate scrie sub forma unui model AR al reziduurilor patratice, si modelul GARCH se poate exprima sub forma unui model ARMA al reziduurilor patratice.

Deoarece $E_{t-1(}\varepsilon 2t) = \sigma_{2t}$, ecuatia (9) poate fi rescrisa in felul urmator:

[1] Hansen, P, Lunde A., *A forecast comparison of volatility models: Does anything beat a GARCH(1,1) model*?, Journal of Applied Econometrics 20, 2004;

$$\varepsilon_t^2 = \omega_0 + (\alpha_1 + \beta_1)\varepsilon_{t-1}^2 + u_t - \beta_1 u_{t-1},$$
(10)

expresie ce reprezinta un model ARMA(1,1) in care $u_t = \varepsilon_t^2 - E_{t-1}(\varepsilon_t^2)$ este disturbanta MDS1.

Din ecuatia (10) desprindem si principalele proprietati ale modelului GARCH(1,1).

De exemplu, este evident ca persistenta variantei conditionate in timp este surprinsa de suma $\alpha_1+\beta_1$, iar pentru ca procesul sa fie covariant stationar este necesar ca aceasta suma sa fie subunitara ($\alpha_1+\beta_1 < 1$).

De asemenea, varianta neconditionata va fi egala cu:

$$\overline{\sigma}^2 = \mathrm{var}(\varepsilon_t) = \frac{\omega_0}{(1-\alpha_1-\beta_1)}$$
(11)

In cazul modelului GARH(p,q) din (8), reziduurile ε_t se vor comporta ca un process ARMA(p,q).

Conditia ce trebuie indeplinita pentru ca procesul sa fie covariant stationar va fi in acest caz:

$$\sum_{i=1}^{p}\alpha_1 + \sum_{j=1}^{q}\beta_1 < 1,$$

[1] Zivot, Eric, *Practical Issues in the Analysis of Univariate GARCH Models,* in T.G. Andersen, RA Davis, J-P Kreis si T Mikosch, Handbook of Financial Time Series, Springer, New York, 2008;

iar varianta neconditionata va avea forma:

$$\overline{\sigma}^2 = \mathrm{var}(\varepsilon_t) = \frac{\omega_0}{1-(\sum_{i=1}^{p}\alpha_i + \sum_{j=1}^{q}\beta_j)}$$

(12)

4. Specificatia mediei conditionate; Modelul GARCH-in-Mean

In functie de frecventa datelor utilizate si de tipul activului analizat, media conditionala $E_{t-1}[yt]$ este specificata fie ca o constanta, fie ca un proces autoregresiv si de medie mobila (ARMA) de ordine scazuta.

In investitiile financiare, riscul ridicat este de obicei asociat cu un randament asteptat ridicat. Pentru a surprinde aceasta relatie, Engle, Lilien si Robins (1987) au propus extinderea modelului GARCH clasic astfel incat volatilitatea conditionala sa genereze o prima de risc care sa fie incorporata in randamentul asteptat. Aceasta extensie a modelului GARCH este cunoscuta sub denumirea de modelul GARCH-in-Medie sau GARCH-M (GARCH-in-Mean).

Modelul Garch-M este utilizat asadar in aplicatii financiare in care randamentul asteptat al unui activ este legat de riscul asociat respectivului activ. Coeficientul estimat pentru termenul ce reprezinta volatilitatea conditionala reprezinta o masura a relatiei risc-randament pentru procesul studiat.

Specificatiile cele mai utilizate pentru volatilitatea conditionala sunt σt, σ2t sau ln(σ2t).

Daca introducem volatilitatea conditionata (de exemplu sub forma σ2t) in ecuatia mediei din modelul GARCH(1,1), obtinem modelul Garch-M standard propus de catre Engle, Lilien and Robins, 1987):

$$R_t = \mu + b\sigma_t^2 + \varepsilon_t,$$
(13)

iar ecuatia variantei conditionate ramane identica cu (9):

$$\sigma_t^2 = \omega_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$$

In cazul in care se obtine o valoare pozitiva semnificativa pentru coeficientul volatilitatii din ecuatia mediei (b) , atunci un risc mai mare conduce la o crestere a randamentului mediu pentru seria de timp analizata.

5. Caracteristici empirice ale seriilor de randamente

Consideram asadar patru serii de randamente zilnice (BET-C, TLV (Banca Transilvania), S&P 500 si KO (Coca-Cola) pe parcursul perioadei 03 Ianuarie 2001 - 09 Februarie 2008, totalizand un numar de 1853 de observatii zilnice pentru fiecare serie analizata1.

In continuare, pentru fiecare activ dezvoltam de asemenea a serie de randamente patratice (r2t) si una de randamente absolute (|rt|).

Figura 1 prezinta evolutia randamentelor (ln) zilnice, in timp ce Figura 2 reliefeaza randamentele patratice, iar Figura 3 randamentele absolute ale celor patru serii de date in perioada de 7 ani considerata.

[1] Am inceput perioada de analiza cu anul 2001 deoarece este momentul in care lichiditatea Bursei de Valori Bucuresti a inceput sa devina satisfacatoare pentru o asemenea analiza a datelor, iar sfarsitul perioadei este data de 09 februarie 2008 deoarece acesta este momentul in care portofoliul active construit pe baza propriului model de selectie isi va schimba componenta.

Figura 1: Evolutia randamentelor zilnice logaritmice ale celor patru serii de timp (03 Ianuarie 2001 - 09 Februarie 2008)

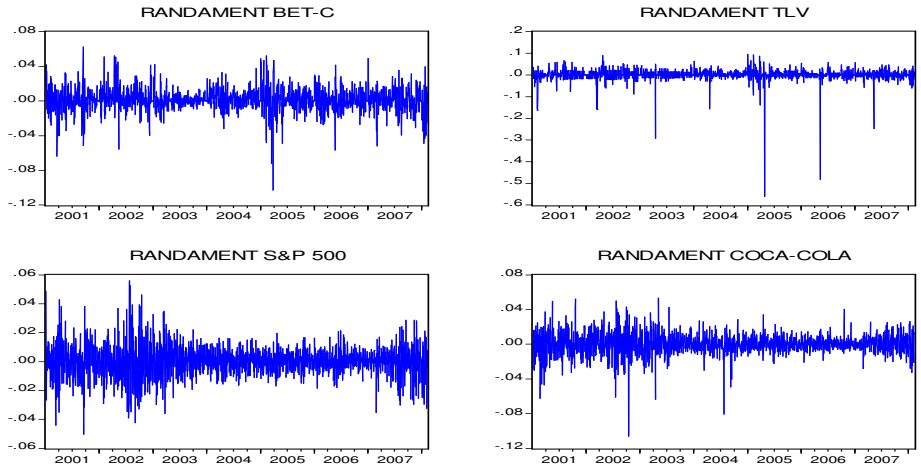


Figura 2: Evolutia randamentelor zilnice patratice ale celor patru serii de timp (03 Ianuarie 2001 - 09 Februarie 2008)

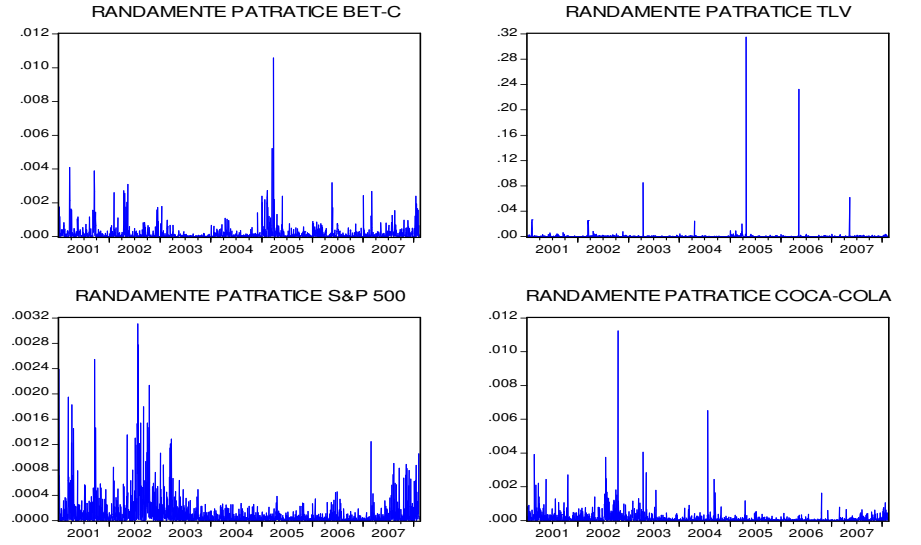
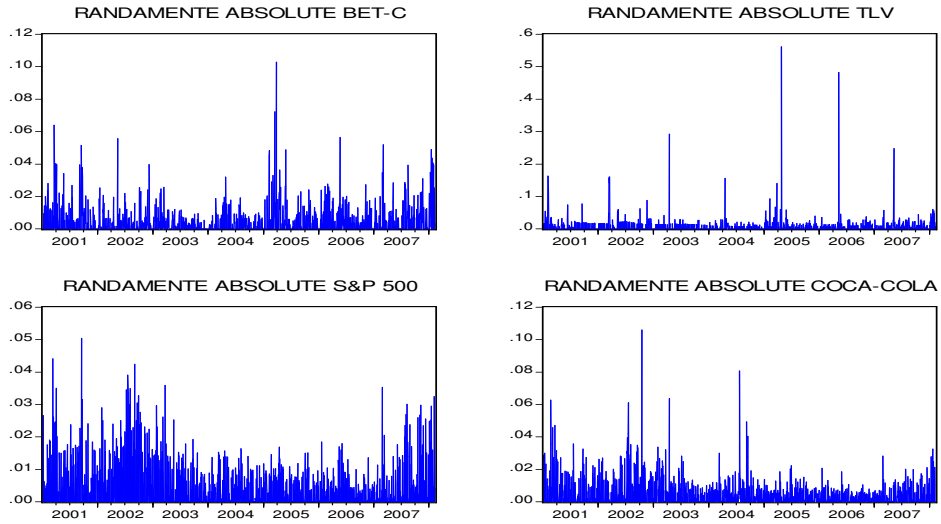


Figura 3: Evolutia randamentelor zilnice absolute ale celor patru serii de timp (03 Ianuarie 2001 - 09 Februarie 2008)



Cu exceptia seriilor de randamente ale actiunii TLV, toate celelalte serii prezinta fenomenul de volatility clustering – valorile mici ale volatilitatii sunt urmate de valori mici, iar valorile mari sunt urmate de alte valori mari. Aceasta manifestare a datelor este confirmata si de catre functiile de autocorelatie (ACF) si autocorelatie partiala (PACF) estimate pana la lag-ul 20 corespunzatoare celor patru serii (vezi Tabelul 1).

Observam ca testul Q are o probabilitate asociata de 1.00 in cazul seriei de randamente patratice a actiunii TLV, ipoteza nula de inexistenta a corelatiei seriale pana la lag-ul 20 neputand fi respinsa in acest caz.

Pe de alta parte, in toate celelalte cazuri testul Q este statistic semnificativ la nivelul de 1% (cu exceptia seriei de randamente ale indicelui S&P 500, pentru care este semnificativ doar la 10%), confirmand existenta corelatiei seriale, deci a heteroschedasticitatii.

Seriile de randamente considerate vor putea fi modelate prin modele GARCH (cu exceptia TLV, unde este posibil sa nu putem potrivi modele GARCH).

Tabelul 1: Estimarea functiilor de autocorelatie, autocorelatie partiala si testul Q cu probabilitatea asociata

	Lag	ACF	PACF	Q	p
rt(ln)					
BET-C	20	0.052	0.028	115.92	0.000
TLV	20	-0.004	-0.007	39.819	0.005
S&P 500	20	-0.062	-0.062	29.499	0.078
COCA-COLA	20	-0.025	-0.023	45.310	0.001
r2t					
BET-C	20	0.019	0.011	387.36	0.000
TLV	20	0.003	0.003	2.0316	1.000
S&P 500	20	0.127	-0.005	1369.5	0.000
COCA-COLA	20	0.078	0.043	209.78	0.000
|rt|					
BET-C	20	0.057	0.023	378.44	0.000
TLV	20	0.001	0.002	66.033	0.000
S&P 500	20	0.025	-0.039	291.71	0.000
COCA-COLA	20	0.049	0.011	204.81	0.000

In cele din urma, Tabelul 2 prezinta statistici descriptive ale seriilor de randamente zilnice logaritmice in perioada considerata, de unde observam ca cele patru distributii sunt in mod clar ne-normale: distributia lui S&P 500 este asimetrica pozitiv si leptokurtica, in timp ce distributiile indicelui BET-C, actiunii TLV si actiunii Coca-Cola sunt asimetrice negativ si de asemenea leptokurtice.

Devierea de la normalitate este cea mai pronuntata in cazul actiunii TLV, al carui skewness are o valoare de -8.16, in timp ce kurtosis-ul este egal cu 133.78, valori foarte departate de valorile corespunzatoare distributiei gaussienne (skewness de 0 si kurtosis de 3).

Tabelul 2: Statistici descriptive pentru seriile de randamente zilnice ale celor patru active (03 Ianuarie 2001 – 09 Februarie 2008)

	Randament BET-C	Randament TLV	Randament S&P 500	Randament COCA-COLA
Mean	0.001240	0.000533	1.98E-05	6.64E-05
Median	0.000664	0.000000	0.000118	0.000000
Maximum	0.062457	0.095791	0.055744	0.053273
Minimum	-0.102876	-0.561469	-0.050468	-0.105973
Std. Dev.	0.013187	0.028897	0.010548	0.011917
Skewness	-0.464047	-8.167298	0.056924	-0.661180
Kurtosis	8.040739	133.7826	5.794280	10.07767
Jarque-Bera	2028.295	1341178.	603.8436	4002.639
Probability	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000

6. Estimarea modelelor GARCH simetrice (GARCH(1,1) si GARCH-M (1,1))

6.1. Estimarea modelului simplu GARCH(1,1) pentru cele patru serii analizate

Dupa cum am vazut anterior, modelul GARCH (1,1) estimeaza urmatoarea ecuatie pentru varianta conditionata:

$$\sigma_t^2 = \omega_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$$

Dupa ce potrivim modelul asupra celor patru serii considerate, vom avea pentru ecuatia variantei estimarile prezentate in Tabelul 3. Trebuie precizat ca am folosit valori back-cast pentru varianta initiala si presupunem pentru inceput ca distributia erorilor standard este normala.

Tabelul 3: Parametrii estimati pentru ecuatia variantei cu modelul GARCH(1,1)

BET-C				
	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
Parametrii GARCH	Ecuatia variantei			
C	2.36E-05	1.92E-06	12.30648	0.0000
ARCH(-1)	0.264753	0.022020	12.02337	0.0000
GARCH(-1)	0.612901	0.025099	24.41908	0.0000
TLV				
Parametrii GARCH	Ecuatia variantei			
C	6.88E-05	1.78E-06	38.60218	0.0000
ARCH(-1)	0.895574	0.016227	55.19120	0.0000
GARCH(-1)	0.549117	0.004263	128.8029	0.0000
S&P 500				
Parametrii GARCH	Ecuatia variantei			
C	1.02E-06	1.85E-07	5.494277	0.0000
ARCH(-1)	0.060279	0.008185	7.364278	0.0000

GARCH(-1)	0.928942	0.008706	106.7056	0.0000
COCA-COLA				
Parametrii GARCH	Ecuatia variantei			
C	9.96E-07	1.51E-07	6.617210	0.0000
ARCH(-1)	0.045749	0.005631	8.124397	0.0000
GARCH(-1)	0.947736	0.005466	173.4030	0.0000

Cei trei coeficienti ai ecuatiei variantei apar in tabel cu notatia C ($\omega 0$ - interceptul), ARCH(1) ($\alpha 1$ - termenul ARCH reprezentat de catre reziduurile patratice (lag) din ecuatia mediei) si GARCH(1) ($\beta 1$ - lag-ul variantei conditionate).

Suma coeficientilor este subunitara doar in cazul seriilor BET-C, S&P 500 si Coca-Cola, conditie necesara pentru ca procesul sa se intoarca la medie (sa fie mean reverting). Dupa cum ne asteptam, seria TLV nu poate fi modelata prin modele GARCH, in cazul sau suma coeficientilor ARCH si GARCH fiind supraunitara, iar varianta exploziva.

In celelalte cazuri suma este subunitara, insa aceasta valoare este totusi foarte apropiata de 1 in cazul seriilor S&P 500 si Coca-Cola, ceea ce inseamna ca procesele ce genereaza aceste serii se intorc la medie foarte incet.

Procesul care genereaza seria de randamente zilnice ale indicelui BET-C se intoarce la medie mai repede, suma coeficientilor ARCH si GARCH fiind egala cu aproximativ 0.87, valoare mai mica decat 0.98, corespunzatoare sumei coeficientilor ARCH si GARCH din ecuatia variantei indicelui S&P 500 si actiunii Coca-Cola.

Deviatia standard neconditionata a randamentelor este dupa cum am vazut calculata cu ecuatia:

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\omega/(1-\alpha-\beta)}$$

si are o valoare ce reiese din modelele GARCH(1,1) de 0.013889 pentru BET-C, 0.009728 pentru S&P 500 si de 0.012364 pentru Coca-Cola, valori apropiate de valorile medii pentru deviatia standard a esantioanelor analizate ce a fost raportata in Tabelul 2 (0.013187 pentru BET-C, 0.010548 pentru S&P 500, respectiv 0.011917 pentru Coca-Cola).

Erorile standard, Z-statistics (care reprezinta ratia dintre coeficienti si erorile standard) precum si p-values completeaza tabelul 3. Putem observa cum toti coeficientii ARCH si GARCH estimati din ecuatia variantei sunt statistic semnificativi la 0.01, cu valori ridicate pentru z-statistic si p-values foarte mici.

6.2. Diagnosticul modelelor GARCH (1, 1)

Dupa ce am potrivit modele GARCH(1,1) asupra seriilor de timp analizate, acestea trebuie insa evaluate printr-un numar de diagnostice statistice si grafice. Daca modelul GARCH este corect specificat, atunci reziduurile standardizate ale acestuia nu trebuie sa mai prezinte corelatie seriala, heteroskedasticitate conditionata sau orice alt tip de dependenta nelineara.

De aceea, estimam pentru inceput functiile ACF si PACF ale reziduurilor standardizate ale modelelor, precum si testul Q (Ljung-Box statistics) pentru a investiga existenta corelatiei seriale in reziduuri.

In continuare, existenta altor efecte ARCH posibil ramase in reziduuri este testata cu ajutorul testului LM (Lagrange multiplier). Daca ecuatia variantei propusa de modelul nostru este corect specificata, atunci nu ar trebui sa mai avem efecte ARCH in reziduuri. Testul LM investig-

heaza ipoteza nula de inexistenta a efectelor ARCH si este necesar ca acesta sa aiba o valoare estimata care sa nu fie semnificativa din punct de vedere statistic pentru a nu avea puterea sa respinga H0.

Tabelul 4 prezinta valorile testului Ljung-Box (coloana 2), valorile testului ARCH LM (coloana 3), precum si valorile testului Jarque-Bera pentru investigarea normalitatii reziduurilor standardizate (coloana 4).

Tabelul 4 : Diagnosticul reziduurilor modelelor GARCH(1,1)

Activul financiar	Q-stat	Testul ARCH-LM	JB
BET-C	106.02 (0.000)	1.143861 (0.296385)	1005.362 (0.00000)
TLV	16.263 (0.700)	0.044575 (1.000000)	1159120.00 (0.00000)
S&P 500	20.308 (0.439)	0.931951 (0.545605)	261.5394 (0.000000)
COCA-COLA	23.253 (0.277)	0.428577 (0.987153)	3652.8590 (0.00000)

NOTA: - valorile p are testelor estimate sunt prezentate in paranteza;

- toate testele estimate folosesc o valoare de 20 pentru lag-ul de timp.

Testul Q-statistic corespunzator ipotezei nule ca nu exista autocorelatie in reziduuri pana la lag-ul 20 confirma lipsa autocorelatiei pentru seriile TLV, S&P 500 si Coca-Cola, insa respinge ipoteza nula in cazul indicelui BET-C.

Pe de alta parte, testul ARCH LM ne arata ca putem accepta ipoteza nula de „inexistenta a efectelor ARCH" (coloana 3), rezultatele neavand semnificatie statistica in niciunul din cele patru cazuri.

Testul Jarque-Bera (coloana 4) confirma si el ca reziduurile modelelor nu sunt inca normale. Seriile de randamente prezinta asadar proprietatile empirice enumerate de catre Cont (2001).

Putem concluziona asadar ca modelele GARCH(1,1) sunt corect specificate pentru seriile TLV, S&P 500 si Coca-Cola, insa pentru indicele BET-C ar trebui cautate alte specificatii pentru ecuatia modelului, deoarece GARCH(1,1) nu a reusit sa inlature complet heteroschedasticitatea prezenta in reziduuri (functiile de autocorelatie, autocorelatie partiala si testul Q (neprezentate aici) confirma prezenta corelatiei seriale in reziduurile standardizate pana la lag-ul 20, in timp ce in reziduurile patratice nu mai exista corelatie seriala).

7. Estimarea modelului GARCH-in-Mean (1.1) pentru seriile de timp considerate

Modelul Garch-M standard dezvoltat de catre Engle, Lilien si Robins (1987) introduce varianta (sau deviatia standard) drept factor de risc in ecuatia mediei, in timp ce specificatiile pentru ecuatia volatilitatii conditionate raman aceleasi ca in modelul standard GARCH, adica:

$$R_t = \mu + \beta_2 \sigma_t^2 + \varepsilon_t$$

si

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha\varepsilon_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2$$

Coeficientii termenului ce reprezinta volatilitatea din ecuatia mediei (β2) rezultati in urma estimarii unui model Garch-M (1,1) pe cele trei esantioane analizate sunt prezentati in Tabelul 5 (factorul de risc ce reprezinta volatilitatea in ecuatia mediei este deviatia standard) .

Tabelul 5: Coeficientii β_2 din ecuatia mediei rezultati din estimarea modelelor GARCH-M (1,1)

Activ	β2	Std. Error	z-Statistic
BET-C	0.130297	0.024006	5.427630 (0.0000)
S&P 500	0.042655	0.022990	1.855371 (0.0635)
COCA-COLA	0.042740	0.022703	1.882568 (0.0598)

NOTA: valoarea p este prezentata in paranteza

Coeficientul deviatiei standard conditionate din ecuatia mediei a modelului Garch-M, notat cu β_2, este pozitiv si semnificativ statistic pentru toate cele trei serii, ceea ce sugereaza faptul ca un risc de piata mai mare reflectat de catre deviatia standard conditionata va conduce si la randamente mai mari ale actiunilor. Relatia este mai puternica in cazul indicelui BET-C (0.13 semnificativ la 1%), in timp ce relatia pozitiva dintre volatilitate si randament are valori similare pentru S&P 500 si Coca-Cola (0.0426, respectiv 0.0427, ambele semnificative la 10%).

In concluzie, seria de randamente zilnice a actiunii romanesti TLV nu prezinta fenomenul de clusterizare a volatilitatii, iar in consecinta nu

poate fi modelata prin modele GARCH, deoarece in cazul acesta suma coeficientilor ARCH si GARCH este supraunitara, iar varianta exploziva.

Pentru seriile de randamente zilnice ale BET-C, S&P 500 si Coca-Cola suma coeficientilor este subunitara, deci conditia necesara pentru ca procesul sa se intoarca la medie (sa fie *mean reverting*) este indeplinita. Pentru aceste trei serii de timp, toti coeficientii ARCH si GARCH estimati din ecuatia variantei sunt statistic semnificativi la 0.01, cu valori ridicate pentru z-statistic si p-values foarte mici. De asemenea, pentru aceste trei serii deviatia standard neconditionata are valori apropiate de valorile medii ale esantioanelor analizate. Diagnosticul modelelor confirma faptul ca modelele GARCH(1,1) sunt corect specificate pentru seriile S&P 500 si Coca-Cola, insa pentru indicele BET-C ar trebui cautate alte specificatii pentru ecuatia modelului, deoarece GARCH(1,1) nu a reusit sa inlature complet heteroschedasticitatea prezenta in reziduuri. In cele din urma, modelul GARCH-in-Mean confirma faptul ca exista o legatura pozitiva intre risc si randament pentru seriile analizate, iar aceasta relatie este mai puternica in cazul indicelui romanesc BET-C.

Bibliografie:

Akgiray, Vedat, Conditional Heterroscedasticity in Time Series of Stock Returns: Evidence and Forecasts, Journal of Business 62 (1), 1989;

Andersen T.G, T. Bollerslev, and F.X. Diebold, Modeling and Forecasting Realized Volatility," Econometrica, Vol. 71 (2003);

Andersen T.G, T. Bollerslev, and N. Meddahi, Analytical Evaluation of Volatility Forecasts, International Economic Review, Vol. 45 (2004);

Andersen T.G. , T. Bollerslev, and N. Meddahi, Correcting the Errors: On Forecast Evaluation Using High-Frequency Data and Realized Volatilities, Econometrica, Vol. 73 (2005);

Andersen T.G. and T. Bollerslev, Answering the Skeptics: Yes, ARCH Models Do Provide Good Volatility Forecasts, International Economic Review, Vol. 39 (1998),

Andersen T.G. and T. Bollerslev, Deutschemark-Dollar Volatility: Intraday Activity Patterns, Macroeconomic Announcements, and Longer Run Dependencies, Journal of Finance, Vol. 53 (1998)

Andersen T.G. and T. Bollerslev, Intraday Periodicity and Volatility Persistence in Financial Markets, Journal of Empirical Finance, Vol. 4 (1997);

Andersen T.G., T. Bollerslev, and S. Lange, Forecasting Financial Market Volatility: Sampling Frequency vis-a-vis Forecast Horizon, Journal of Empirical Finance, Vol. 6 (1999);

Andersen T.G., T. Bollerslev, F.X. Diebold, and H. Ebens, The Distribution of Stock Return Volatility, Journal of Financial Economics, Vol. 61 (2001);

Andersen T.G., T. Bollerslev, F.X. Diebold, and P. Labys, The Distribution of Exchange Rate Volatility, Journal of American Statistical Association, Vol. 96 (2001);

Andersen T.G., T. Bollerslev, P. Christoffersen, and F.X. Diebold, Practical Volatility and Correlation Modeling for Financial Market Risk Management, NBER Working Paper No. 11069, January 2005;

Andersen T.G., T. Bollerslev, P. Christoffersen, and F.X. Diebold, Volatility Forecasting, NBER Working Paper No. 11188, March 2005;

Bollerslev, T. Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity, Journal of Econometrics, 31, 1986;

Bollerslev, T. A Conditional Heteroskedastic Time Series Model for Speculative Prices Rates of Return. Review of Economics and Statistics, 69, 1987;

Bollerslev T and H. Zhou, Estimating Stochastic Volatility Diffusions Using Conditional Moments of Integrated Volatility, Journal of Econometrics, Vol.109 (2002);

Braun, P A., D. B. Nelson, and A. M. Sunier, Good News, Bad News, Volatility and Betas, Journal of Finance 50(5), 1995;

Campbell, J., M. Lettau, B. Malkiel, and Y. Xu, 2001, Have Individual Stocks Become More Volatile? An Empirical Exploration of Idiosyncratic Risk, Journal of Finance 56(1), 2001;

Engle, R. F., Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of the United Kingdom Inflation, Econometrica 50(4), 1982;

Engle, R. F., V. K. Ng, and M. Rothchild, Asset Pricing with a FACTORARCH Covariance Structure: Empirical Estimates for Treasury Bills, Journal of Econometrics 45, 1990;

Engle, R.F. GARCH 101: The Use of ARCH/GARCH Models in Applied Economics. Journal of Economic Perspectives, 15, 2001;

Engle, R.F. and González-Rivera, Semiparametric ARCH models. Journal of Business and Economic Statistics, 9, 1991;

Ferson, W. E. and C. R. Harvey, The Variation of Economic Risk Premiums, Journal of Political Economy 99(2), 1991;

Glosten, L. R., R. Jagannathan, and D. E. Runkle, On the Relation between the Expected Value and the Volatility of the Nomial Excess Return on Stocks, Journal of Finance 48(5), 1993;

Hansen, B. E., Autoregressive Conditional Density Estimation, International Economic Review 35, 1994;

Harvey, C. R. and A. Siddique, Autoregressive Conditional Skewness, Journal of Financial and Quantitative Analysis 34(4), 1999;

MacDonald, J. A. and H. Shawky, On Estimation Stock Market Volatility: An Exploratory Approach, Journal of Financial Research 18(4), 1995;

Nelson, D. B., Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: a New Approach. Econometrica, 59(2), 1991;

Nelson, D. B., and Cao, C. Q. Inequality Constraints in the Univariate GARCH Model. Journal of Business and Economic Statistics, 10(2), 1992;

Pagan, A., The Econometrics of Financial Markets. Journal of Empirical Finance, 3, 1996;

Pagan, A., and Schwert G.W., Alternative Models for Conditional Volatility, Journal of Econometrics, 45, 1990;

Poon, S.-H., and Granger, C. Forecasting Financial Market Volatility: A Review. Journal of Economic Literature, 41(2), 2003;

Poon, S.-H., and Granger, C., Practical Issues in Forecasting Volatility, Financial Analysts Journal, 61(1), 2005;

Sentana, Enrique and Sushi1 Wadhwani, Feedback traders and stock returns autocorrelations: Evidence from a century of daily data, Review of Economic Studies 58, 1991;

Shiller, Robert J., The volatility of long-term interest rates and expectations models of the term structure, Journal of Political Economy 87, 1979;

Taylor, Stephen J., Estimating the variances of autocorrelations calculated from financial time series, Journal of the Royal Statistical Association, Series C (Applied Statistics) 33, 1984;.

Taylor, Stephen J., Forecasting the volatility of currency exchange rates, Journal of International Forecasting 3, 1987;

Tsay, Ruey S., Conditional heteroskedastic time series models, Journal of the American Statistical Association 82, 1987;

Tsay, R.S., Analysis of Financial Time Series. John Wiley & Sons, New York, 2001;

Weiss, Andrew A., ARCH and bilinear time series models: Comparison and combination, Journal of Business and Economic Statistics 4, 1986;

Weiss, Andrew A., ARMA models with ARCH errors, Journal of Time Series Analysis 5, 1984;

Weiss, Andrew A., Asymptotic theory for ARCH models: Estimation and testing, Econometric Theory 2, 1986;

White, Halbert, Maximum likelihood estimation of misspecified models, Econometrica 50, 1982;

Wolff, Christian C.P., Autoregressive conditional heteroskedasticity: A comparison of ARCH and random coefficient models, Economics Letters 27, 1989;

Zin, Stanley E., Modelling the persistence of conditional variances: A comment, Econometric Reviews 5, 1986;

Cristiana TUDOR, PhD Candidate, Assistant lecturer, Departament of International Business and Economics, Bucharest University of Economics, Romania.